Quando la succà non "quadra"

Gabriele Di Segni

20 Tishrì 5769

Introduzione

Queste pagine contengono un **tentativo**[1] di traduzione e spiegazione della discussione talmudica (Talmud Bavlì Succà 7b-8b) inerente ad una succà con pianta circolare. Chiaramente per la succà sono prescritte delle dimensioni minime. Queste però si riferiscono a delle succot di forma quadrata/rettangolare. Si tratta quindi di far quadrare i conti quando ci siano di mezzo dei cerchi, chiamando in causa numeri come π e $\sqrt{2}$. I vari calcoli matematici (abbastanza elementari) necessari per seguire il ragionamento sono riportati esplicitamente assieme a vari disegni esplicativi.

La traduzione e la spiegazione (ad eccezione della parte conclusiva) si basano in buona parte sul commento di Rav Steinsaltz al Talmud.

Nel testo si usa la convenzione: 1 cubito $= 1a$ (iniziale della parola ebraica *ammà*, ossia "cubito").

La discussione

Premessa

La Ghemarà utilizza il valore 3 come "approssimazione" della quantità (a noi) nota come $\pi = 3.14159...$, rifacendosi ai seguenti versi biblici (2 Cronache 4,1-2):

1 ויעש מזבח נחשת עשרים אמה ארכו ועשרים אמה רחבו
ועשר אמות קומתו. 2 ויעש את הים מוצק עשר באמה
משפתו אל שפתו עגול סביב וחמש באמה קומתו וקו שלשים
באמה יסב אתו סביב.

" [1]*[Salomone] fece fare un altare di rame lungo venti cubiti, largo venti cubiti e alto dieci cubiti.* [2]*Fece fare un recipiente di metallo fuso di forma circolare che aveva cinque cubiti di raggio, era alto cinque cubiti ed aveva una circonferenza di trenta cubiti."*

Il secondo versetto ci dice che il rapporto tra la circonferenza ed il raggio del recipiente circolare era $30a/5a = 6$. Ora, il rapporto tra la circonferenza ed il suo raggio è, per definizione, pari a 2π. Quindi, se si segue questo versetto, si ha $\pi \approx 3$.

[1] E quindi potrebbero contenere eventuali sviste ed errori...

La Ghemarà (TB Succà 7b-8b)

אמר רבי יוחנן: סוכה העשויה ככבשן, אם יש בהקיפה כדי לישב בה עשרים וארבעה בני אדם כשרה, ואם לאו פסולה.

Ha detto Rabbì Iochannan: *"Una succà fatta come una fornace [circolare], se sulla sua circonferenza c'è [posto] per far sedere (in essa) ventiquattro persone è valida, altrimenti non è valida"*.[2]

כמאן? כרבי, דאמר: כל סוכה שאין בה ארבע אמות על ארבע אמות פסולה.

Secondo [l'opinione di] chi è [questo insegnamento]?

È secondo [l'opinione di] Rabbì [Iehudà Ha-Nassì], che ha detto: *"Ogni succà che non ha quattro cubiti per quattro cubiti, non è valida"*.

מכדי, גברא באמתא יתיב, כל שיש בהקיפו שלשה טפחים יש בו רוחב טפח, בתריסר סגי.

[Ma] dato che, una persona siede [nello spazio di] (in) un cubito [e] che ogni cosa che ha nella sua circonferenza tre palmi ha la sua larghezza il diametro pari ad un palmo[3], bastano dodici [persone/cubiti]!

Se si richiede solo che la "larghezza" della succà sia di $4a$, potrebbe essere sufficiente una succà con un diametro $d = 4a$ e (secondo l'approssimazione della Ghemarà che pone $\pi \approx 3$) una circonferenza $C \approx 3 \cdot 4a = 12a$ che può quindi ospitare dodici persone. Numero che è ben lontano dalle ventiquattro persone chieste da R. Iochannan.

הני מילי בעיגולא, אבל בריבועא בעיא טפי.

Queste parole [ossia, che il rapporto tra circonferenza e diametro sia pari a 3] [si riferiscono] al cerchio, però per il quadrato, serve di più.

La Ghemarà fa subito notare che stiamo facendo i conti con il cerchio inscritto (al quadrato), mentre le misure prescritte da Rabbì si riferiscono al quadrato che lo contiene (ed ha quindi un perimetro maggiore).

מכדי, כמה מרובע יותר על העיגול? רביע, בשיתסר סגי.

[2] Le misure minime della succà prescritte da Rabbì **non** costituiscono la regola finale. Il ragionamento su come determinare le dimensioni della succà circolare "minima" (a partire dalle dimensioni di quella quadrata) è comunque analogo.

[3] Come già accennato, il valore del rapporto tra circonferenza e diametro (pari a 3) lo si impara da *2 Cronache 4,2*.

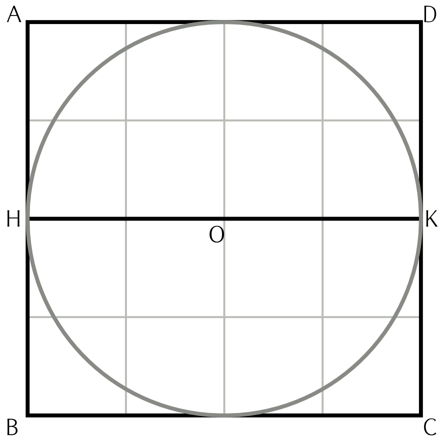

Figura 1: Cerchio inscritto nel quadrato

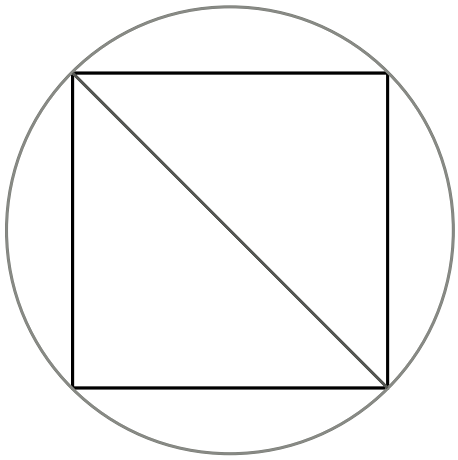

Figura 2: Cerchio circoscritto al quadrato

Ora, di quanto è più grande il quadrato rispetto al cerchio? Di un quarto. [Quindi] bastano sedici [cubiti].

Si veda la figura 1. Il perimetro del quadrato è $P = 4l$ (dove $l = \overline{HK} = d = 4a$) mentre la circonferenza è pari a $C = d\pi = l\pi \approx 3l$: quindi si ha $C/P = \pi/4 \approx 3/4$, ossia $C \approx (3/4)P$ ed in definitiva $P - C \approx (1/4)P$. Aggiungendo $P/4 = 4a$ alle $12a$ della circonferenza (calcolata precendentemente) abbiamo proprio le $16a$ a cui fa riferimento la Ghemarà. Questo equivarrebbe a fissare come criterio (per la succà circolare) l'avere la circonferenza pari al perimetro del quadrato $4a \times 4a$ indicato da Rabbì. Ma il problema iniziale rimane, dato che siamo ancora lontani dal numero ventiquattro.

הני מילי בעיגול דנפיק מיגו ריבועא, אבל ריבועא דנפיק מגו עיגולא בעיא טפי, משום מורשא דקרנתא.

Queste parole [si riferiscono] ad un cerchio che [è] (esce da) dentro il quadrato, però se il quadrato [è] (esce da) dentro il cerchio serve "di più" a causa dello sporgere dei suoi angoli.

מכדי, כל אמתא בריבועא אמתא ותרי חומשא באלכסונא, בשבסר נכי חומשי סגיא.

Dato che per ogni cubito [del lato] del quadrato c'è un cubito e 2/5 sulla diagonale, bastano diciassette [cubiti] meno un quinto.

Quindi se il lato del quadrato è lungo l cubiti, la diagonale è lunga $l \cdot [1 + (2/5)] = l(7/5)$. Come è noto, la diagonale del quadrato misura $\delta = l\sqrt{2}$. Radice di due ($\sqrt{2} = 1.4142...$) è un numero irrazionale[4] che la Ghemarà quindi approssima con $\sqrt{2} \approx 7/5 = 1.4$.[5] In questo modo il cerchio circoscritto (vedi figura 2), che ha come diametro proprio δ, ha una circonferenza pari a

$$C_c = \pi\delta \approx 3 \cdot (7/5) \cdot 4a = (84/5)a = 17a - 1/5a = 16.8a.$$

Ora, dato che questa succà contiene al suo interno tutto il quadrato $4a \times 4a$, ci aspetteremmo che sia appunto $17a - 1/5a$ la misura minima corretta. Ma, siamo sempre lontani dal numero ventiquattro...

לא דק.

[R. Iochannan] non è stato preciso.

La Ghemarà prova a risolvere il problema dicendo che R. Iochannan abbia arrotondato un po' le cifre. Ma questo si scontra con una serie di obiezioni:

- si può arrotondare se il numero si modifica "poco";
- non si può arrotondare un numero se questo implica una facilitazione rispetto ad una regola codificata.

אימור דאמרינן לא דק פורתא, טובא מי אמרינן לא דק?

Si può anche dire (che affermiamo) che si può non essere precisi su piccole quantità, ma su grandi quantità [$24a$ invece di circa $17a$] diciamo forse che si può non essere precisi?

אמר ליה מר קשישא בריה דרב חסדא לרב אשי: מי סברת גברא באמתא יתיב? תלתא גברי בתרתי אמתא יתבי.

Disse Mar il Vecchio, figlio di Rav Chisdà, a Rav Ashi: *"Ritieni forse che una persona sieda in un cubito? [Non è così:] Tre persone occupano due cubiti."*

כמה הוו להוי? שיתסר, אנן שיבסר נכי חומשא בעינן.

[Se così fosse] quanti sarebbero [i cubiti]? Sedici.

Ma noi [ne] vogliamo diciassette meno un quinto.

La Ghemarà prova a risolvere il problema, modificando l'assunto che una persona occupi lo spazio di $1a$.

[4] Ossia un numero che **non** può essere scritto esattamente come rapporto tra due numeri interi: una normale frazione può quindi solo approssimarlo.

[5] Si veda in proposito anche l'Appendice

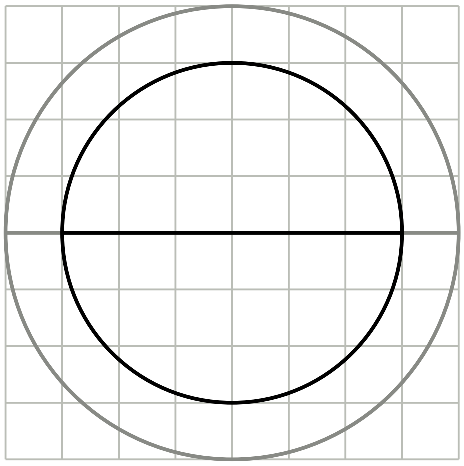

Figura 3: Cerchio esterno e cerchio interno

Ma anche ammettendo una "densità" pari a tre persone ogni due cubiti ($3p/2a$) i conti non tornano: per ospitare 24 persone ci vorrebbe una circonferenza pari a $C = 24p/(3p/2a) = 16a$ (e a noi serve di circa $17a$).

לא דק.

[R. Iochannan] Non è stato preciso.

אימור דאמרינן לא דק לחומרא, לקולא מי אמרינן לא דק?

Si può anche dire (che affermiamo) che si può non essere precisi se [questo corrisponde ad essere] più rigorosi, ma se [questo corrisponde ad essere] più facilitanti diciamo forse che si può non essere precisi?

Abbassare il limite da circa $17a$ a $16a$ equivarrebbe ad essere più facilitanti rispetto alla regola di Rabbì.

אמר ליה רב אסי לרב אשי: לעולם גברא באמתא יתיב, ורבי יוחנן מקום גברי לא קחשיב.

Disse Rav Asi a Rav Ashi: *"In realtà, una persona siede in un cubito e R. Iochannan non ha considerato lo spazio [occupato dalle] (delle) persone."*

La Ghemarà torna sui suoi passi, proponendo una spiegazione alternativa, ossia che R. Iochannan stesse riferendosi non alle persone all'interno della succà, ma alle persone che la circondano dall'esterno.

כמה הוו להו תמני סרי, בשיבסר נכי חומשא סגיא.

[In questo modo] quanti sarebbero [i cubiti]? Diciotto. Ma ne servono diciassette meno un quinto.

Si veda figura 3. Le persone che circondano la succà formano un circolo di diametro pari a $d_p = 8a$; se ora togliamo $1a$ dai due estremi di d_p (dato che una persona occupa $1a$ e che questo spazio non va considerato), abbiamo per la succà (dentro al circolo di persone) un diametro $d_s = 6a$ e quindi una circonferenza pari a $18a$.

היינו דלא דק, ולחומרא לא דק.

Questo è ciò su cui [R. Iochannan] non è stato preciso; e il suo non essere preciso porta ad essere più rigorosi.

E non c'è quindi problema ad arrotondare un po'.

La Ghemarà accenna un ulteriore tentativo di spiegazione, abbandonandolo subito.

רבנן דקיסרי, ואמרי לה דייני דקיסרי אמרי: עיגולא דנפיק מגו ריבועא רבעא, ריבועא, דנפיק מגו עיגולא פלגא.

I Maestri di Cesarea, o secondo alcuni i Giudici di Cesarea, dicono: *"un cerchio che [è] (esce da) dentro il quadrato, di un quarto [è più piccolo]; il quadrato che [è] (esce da) dentro il cerchio, [è più piccolo] di metà.*

ולא היא, דהא קחזינן דלא הוי כולי האי.

Ma non è così, dato che vediamo che non arriva a tanto.

La Ghemarà sembra interpretare la frase dei Maestri di Cesarea così: *"il cerchio che è dentro il quadrato ha [la circonferenza più piccola] di un quarto [rispetto al perimetro del quadrato]; il quadrato che è dentro il cerchio ha [il perimetro più piccolo] di metà [rispetto alla circonferenza]"*. Se così fosse, avremmo per la circonferenza del cerchio circoscritto una lunghezza pari a $C \approx (3/2)P = (3/2)\cdot 16a = 24a$, il che risolverebbe il nostro problema. Però, abbiamo già visto che la prima parte della frase è "corretta" (con le solite approssimazioni), mentre la seconda parte è palesemente **scorretta**: il perimetro del quadrato (inscritto) è $P = 4l$ mentre la circonferenza del cerchio (circoscritto) come abbiamo già visto è pari a $C \approx 3\cdot(7/5)l = (21/5)l$, quindi $C/P \approx 21/20$ e dunque $C - P \approx (1/20)P$: numero che è molto lontano dall'$1/2$ a cui fa riferimento la citazione ed è per questo che la Ghemarà rigetta subito questa ipotesi.

Conclusione?

Ricapitolando, l'unica spiegazione "valida" ancora in campo per la questione delle ventiquattro persone, è quella di considerare queste persone all'esterno della succà, concentrandosi su perimetri e circonferenze ed ammettendo una certa approssimazione da parte di R. Iochannan ($18a$ invece di $16.8a$).

Proviamo però a riferire l'insegnamento dei Maestri di Cesarea alle aree e non ai perimetri.[6] Consideriamo la figura 4. Il cerchio grigio (inscritto nel quadrato $ABCD$) ha diametro $d = \overline{HK}$ e quindi la sua area è pari a:

$$A_C = \pi \cdot (d/2)^2 \approx 3(\overline{HK}/2)^2 = (3/4)\overline{HK}^2 = (3/4)d^2.$$

L'area del quadrato $ABCD$ è pari a $A_Q = \overline{BC}^2 = \overline{HK}^2$.

[6] Il fatto che la Ghemarà lavori con una succà con lato di $4a$ aiuta a creare confusione tra perimetro ed area: il valore "numerico" di entrambe le grandezze è pari a 16 ($P = 4l = 16a$, $A = l^2 = 16a^2$) ma ovviamente le loro dimensioni (lunghezza ed area rispettivamente) sono diverse.

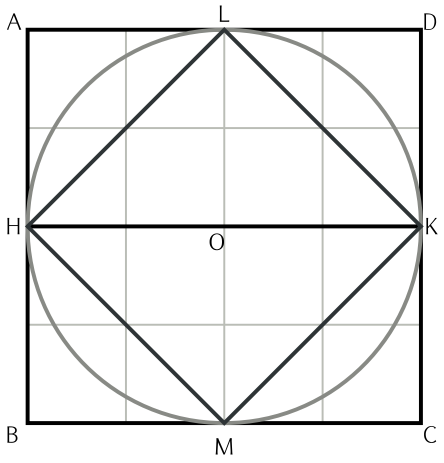

Figura 4: Quadrato circoscritto e quadrato inscritto

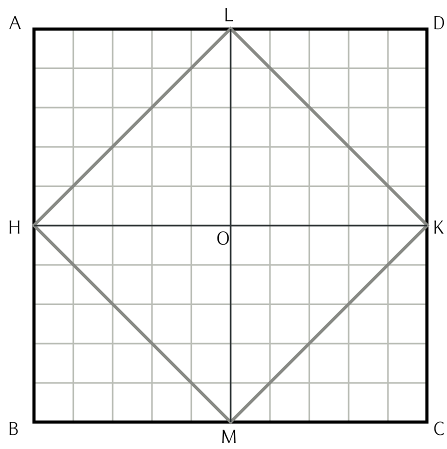

Figura 5: Rapporto tra diagonale e lato del quadrato

Quindi $A_Q - A_C \approx (1/4)\overline{HK}^2 = (1/4)A_Q$, come suggerisce la prima parte della citazione.

L'area del quadrato $HLKM$ è pari a $A_q = \overline{HL}^2$, ma $d = \overline{HK} = \sqrt{2} \cdot \overline{HL}$, quindi $A_q = (\overline{HK}/\sqrt{2})^2 = d^2/2$. Come abbiamo visto, l'area del cerchio (grigio) circoscritto al quadrato $HLKM$ è $A_C \approx (3/4)d^2$. Quindi $A_C \approx (3/2)A_q$ e così $A_C - A_q \approx (1/2)A_q$ come suggerisce la seconda parte della citazione.

In questo modo, le parole dei Maestri di Cesarea, non solo sono "corrette", ma ci forniscono anche un suggerimento utile (ossia, di concentrarsi sull'**area** invece che sul perimetro) per interpretare le parole di R. Iochannan.

Se interpretiamo le parole di R. Iochannan non più come *"sulla circonferenza c'è posto"* ma come *"nella circonferenza c'è posto"* (ossia in tutto il cerchio delimitato dalla circonferenza) e se diciamo che una persona occupa un'area pari a $1a^2$ (invece di dire che occupa $1a$, ossia una lunghezza), per accomodare le ventiquattro persone avremmo bisogno di una succà di area $A_s = 24a^2$ e quindi (nell'approssimazione $\pi \approx 3$, $\sqrt{2} \approx 1.4$) con un raggio pari a $r_s \approx \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}a \approx 2.8a$, un diametro pari a $d_s = 5.6a$ e dunque una circonferenza pari a $C_s \approx 3 \cdot d_s = 16.8a$. Ossia la circonferenza di $17a - (1/5)a$ che avevamo tanto faticato a "giustificare" precedentemente.

Il dubbio su questa linea interpretativa comunque rimane, dato che le Tosafot (8b *Ribu'a*) sembrano sapere che le parole dei Maestri di Cesarea (e di R. Iochannan) siano approssimativamente "corrette" se riferite all'area:

ותימה היאך טעו במדה רבי יוחנן ודייני דקיסרי דמאחר שלא מדדו הדבר היאך עשו כלל על דבר שאינו. ויש לומר דקבלה בידם לשון זה של ריבוע מגו עיגולא פלגא והוא אמת לענין המקום ולא לענין אורך החוט המקיף.

E c'è da meravigliarsi di come abbiano potuto sbagliare sulla misura R. Iochannan e i Giudici di Cesarea. Perché se non hanno misurato la cosa, hanno stabilito una regola in proposito che non è [corretta]? E (c'è da) [si può] rispondere [così]: che avevano ricevuto come tradizione questo insegnamento del *"quadrato che è nel cerchio, [è più piccolo di] metà"*, che se riferito allo spazio [i.e. all'area] è corretto, ma non [lo] è se riferito alla lunghezza della linea che circonda [il cerchio, ossia la circonferenza].

Ma nonostante questo accenno, non insistono su questa via per risolvere il "problema" delle ventiquattro persone.

Appendice

כל אמתא בריבוע אמתא ותרי חומשי באלכסונה

per ogni cubito [del lato] del quadrato c'è un cubito e 2/5 sulla diagonale

Già le Tosafot (8a *Kol amtà*) fanno notare che il rapporto tra la diagonale ed il lato del quadrato non può essere pari solo a 7/5. Basta guardare figura 5. Il quadrato $ALOH$ ha $l = 5a$, e quindi, secondo la Ghemarà si avrebbe per la sua diagonale $\overline{LH} = (7/5)5a = 7a$; ora, $\overline{LH}$ è anche il lato del quadrato $HLKM$, che in questo modo verrebbe ad avere area pari a $\overline{LH}^2 = 7a \cdot 7a = 49a^2$. Ma dalla figura si vede che $HLKM$ è precisamente la metà del quadrato $ABCD$ che ha lato $10a$ e quindi area $100a^2$: quindi $HLKM$ ha area pari a $50a^2$ e dunque la diagonale $\overline{LH}$ non può essere uguale solo ai $7/5 = 1.4$ del lato.

Legenda

La traduzione letterale del testo è resa con caratteri normali; [tra parentesi quadre] sono riportate le parole da aggiungere per avere una traduzione scorrevole e (tra parentesi tonde) quelle da togliere. Le citazioni sono in *"in corsivo"*, mentre i commenti sono scritti in questo modo.